IV. АНТИ-ПРОСТРАНСТВО

Ю.И. Бабенко

4.1. Расходящиеся ряды	**стр. 4**
4.2. Антипространства	**стр. 16**
4.3 Правильные фигуры в антипространствах	**стр. 21**
4.4 Уравнение Шредингера в антипространствах	**стр. 26**
4.5. Физические аналогии	**стр. 32**

С момента зарождения цивилизации и до конца 20-го столетия представления об устройстве Мира сводились к трем основным идеям:

1. Материя бесконечно делима механически.

2. Материя состоит из неделимых первичных элементов.

3. Материя есть порождение духа и ее видимая структура совершенно отлична от «истинной».

Мы не будем здесь рассматривать третью идею, несмотря на несомненное уважение к религиозным и идеалистическим учениям, стараясь оставаться в рамках Науки и ее методов. И такую «отбраковку» Гипотезы 3 придется делать до тех пор, пока понятие «духа» не будет причислено к физическим категориям. В принципе современное состояние наших знаний о природе микромира не исключает такой возможности в связи с ролью «наблюдателя» в микрофизическом эксперименте. (см., например, [10].)

Бесконечная делимость материи при сохранении масштабного самоподобия, несомненно, устроила бы специалистов по фрактальной геометрии. В средние века, на заре развития микроскопии, наблюдатели усмотрели в сперматозоиде целого, но очень маленького человечка. Некоторые ученые полагали, что его сперматозоиды содержат следующего, еще меньшего человечка и т. д. до бесконечности… Такая же структура «матрешек» казалась естественной и для всей материи. Однако последующее развитие науки неопровержимо доказало, что свойства материи при «последовательном измельчении» радикально меняются. Более того, эти свойства становятся в значительной степени недоступными нашему образному мышлению и адекватно описываются только соответствующим образом подобранными математическими конструкциями.

Впрочем, подобных примеров много и в макромире. Мы не можем представить четырехмерное пространство, но уверенно используем его при рассмотрении математических задач с четырьмя переменными. Более того, мы совершенно не в состоянии представить себе расстояние до соседней галактики. В нашем воображении оно не отличается от 10 или, максимум, 100 километров, хотя соответствующие расчеты движений между галактиками выполняются вполне уверенно.

Конечно, возможность бесконечной делимости материи не исключена, но, во всяком случае, при радикальном изменении свойств на каждом уровне.

Тезис Демокрита о существовании первичных элементов неоднократно воскресал как птица Феникс. Первичными кирпичиками побывали атомы, элементарные частицы, кварки. Но сам факт существования первичного элемента как физического объекта представляется невозможным даже в рамках «человеческого» восприятия действительности. Если есть первичный кирпичик, то у него есть и числовые характеристики. А последнее означает, что он «как-то устроен», т. е., в свою очередь, не является элементарным.

С подобным же положением столкнулись физики во времена Максвелла, когда многие полагали, что вакуум — это абсолютная пустота. Но если свет распространяется в вакууме с определенной (конечной) скоростью, значит вакуум «имеет какое-то устройство» и, во всяком случае, не является пустотой. Последующее развитие науки подтвердило этот тезис.

И хотя мы до сих пор не знаем «как устроен вакуум», мы знаем, что в нем могут рождаться частицы, т. е. пустотой он не является.

Итак, по мере проникновения вглубь материи, мы сталкиваемся с изменением ее свойств. Но есть ли в этих изменениях какие-либо закономерности? Несомненно, так как каждая теория «более глубокого» уровня строится с использованием экстраполяции известной суммы знаний, накопленной на предыдущих уровнях.

Квантовая механика не появилась бы, если бы не было волновой теории света, квантовая электродинамика немыслима без квантовой механики, и т. д. При этом перед исследователями встают вечные вопросы — что именно и как экстраполировать? В такой ситуации процесс познания неизбежно сопряжен с перебором большого количества вариантов.

Эта книга представляет один из таких вариантов, выбранный совершенно произвольным образом. Автора привлекла следующая альтернатива, отдельные высказывания о которой появились во второй половине 20 столетия (см., например [5, с. 50].)

4. Начиная с некоторых, достаточно малых масштабов, свойства материи меняются таким образом, что «меньшие» частицы оказываются, в некотором смысле, состоящими из «больших».

Осторожнее было бы сказать, что одним из способов анализа свойств очень маленьких частиц является представление их суперпозицией больших частиц. При этом сам собой отпадает вопрос о существовании первичных элементов, но вместо этого появляется множество новых вопросов, некоторые из которых будут в дальнейшем рассматриваться.

Не следует удивляться тому, что сам факт составления меньших частиц из больших нелегко представить. Мы уже писали выше и неоднократно будем напоминать далее о необходимости «интеллектуального аскетизма», заключающегося в том, что далекие от нашего повседневного чувственного опыта объекты и явления, которые нельзя представить образно в полной мере, можно попытаться описать с помощью математического аппарата.

В этом разделе вводится в рассмотрение новый математический объект — *пространство с не положительным (целым) числом измерений, которое для краткости мы часто будем именовать антипространством.*

В рамках предложенного ниже формализма нульмерное пространство в некотором смысле является дуальным, принадлежа одновременно и к обычному пространству и к антипространству. При этом в зависимости от указанной принадлежности 0-пространство проявляет различные взаимоисключающие свойства. Как обычное пространство — это точка, как антипространство — это протяженное пространство. При этом последняя конструкция обладает рядом парадоксальных свойств, некоторые из которых имеют аналоги в физике микромира и соответствуют *Альтернативе 4*.

По уровню доказательности материал книги очень неоднороден. Абстрактная *алгебраическая* теория антипространства в рамках предложенных аксиом, несомненно, верна и, как нам представляется, удовлетворяет эстетическим требованиям, негласно предъявляемым к математическим теориям. Описание большинства *геометрических* характеристик «минус-тел» предположительно. И, наконец, обсуждение возможности *реального* существования антипространств является достаточно спекулятивным, так как не содержит каких-либо *количественных* результатов. Да и качественное сопоставление с наблюдаемыми фактами произведено выборочно, в соответствии с уровнем знаний автора, который не является специалистом по физике микромира. В сущности, эта часть книги даже не является научной. Тем не менее, она представляется достаточно занимательной, указывая одну из возможных форм организации материи.

В тексте очень часто встречаются кавычки. Не имея адекватного языка для описания «минус-объектов», мы вынуждены более или менее произвольно привлекать образную, нечетко определенную терминологию. Иногда приводятся результаты, на первый взгляд противоречащие нашим же концепциям. Но ведь именно парадоксы любой теории являются одним из самых эффективных средств выяснения границ ее применимости, уточнения исходных положений и выбора путей дальнейшего развития.

На протяжении всей истории существования науки многие математические понятия непрерывно обобщались. Наиболее известным примером является трансформация понятия числа. Пять тысяч лет назад число было только целым и положительным. Примерно через две тысячи лет оно стало дробным. Отрицательные числа появились в Индии примерно тысячу лет назад и первоначально интерпретировались как «долг», что не удивительно, так как большинство арифметических задач того времени было связано с торговыми операциями. Одновременно с этим достижением начало оформляться понятие нуля не только как вспомогательного средства в позиционной системе исчисления, но и как самостоятельного числа. Этот процесс окончательно завершился только к 16 столетию. Комплексные числа возникли как результат решения алгебраических уравнений. Пока речь шла о конкретных уравнениях, можно было трактовать эти числа как отсутствие решений. Но когда выяснилось, что кубическое уравнение может иметь три вещественных корня, которые нельзя представить алгебраически без использования мнимых величин, пришлось включить их в математическую практику. После открытия Эйлером знаменитой формулы: $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ мнимые числа нашли многочисленные применения при решении физических задач. В частности, без их использования трудно представить современную квантовую механику.

В дальнейшем возникли более сложные пост-числовые системы — кватернионы и октавы, векторы и тензоры, матрицы и группы. Появились иррациональные и трансцендентные числа, кардинальные числа Кантора и т. д.

Основатели дифференциального и интегрального исчисления Ньютон и Лейбниц, по-видимому, одни из первых осознали тот факт, что не следует дожидаться, пока возникнет естественная необходимость расширения какого-либо математического понятия за пределы первоначальных границ. Следует обобщать существующие понятия всеми доступными способами, разумеется, руководствуясь своеобразным эстетическим чувством. В частности, Ньютон установил разложение бинома применительно к дробным показателям степени, а также заметил, что понятие n-ой производной от степенной функции легко обобщается на дробные значения величины n.

Именно на пути подобных обобщений наиболее вероятно открытие новых математических методов и физических приложений. Вообще, история математики показывает, что множество, на первый взгляд, абстрактных конструкций рано или поздно находит практическое применение. Могли ли думать античные ученые, что конические сечения станут неотъемлемой частью небесной механики? Эрмит ввел в рассмотрение свои матрицы до зарождения квантовых представлений. В 19 столетии Риман, Лиувилль, Летников, Сонин занимались обобщением понятия n-ой производной на дробные показатели, почти не заботясь о приложениях. Автору посчастливилось найти эффективное практическое применение дробной производной в самых разнообразных теплофизических и диффузионных задачах [2-4].

Первое множество дробной размерности было построено Кантором во второй половине 19 столетия. Теория пространств с дробным (положительным) числом измерений ведет свое начало от работ Хаусдорфа, опубликованных в начале 20 столетия, но практическое применение она нашла лишь во второй половине века. (см., например, [7, 17, 18].) Особенно впечатляющими оказались приложения в механике (странный аттрактор, теория динамического хаоса [1]).

Но если существуют реальные объекты, имеющие дробную размерность, то (повторяя историю развития понятия числа) возникает желание построить теорию пространств с отрицательным (для начала целым) числом измерений. Такая попытка сделана в настоящей работе.

Оказалось, что адекватным математическим аппаратом, описывающим антипространства (минус-пространства), являются двухсторонние расходящиеся ряды (ДРР). Детальное изложение современной теории расходящихся рядов (РР) увело бы нас слишком далеко от темы исследования, поэтому мы приводим в 4.2 лишь необходимые сведения, следуя книге Харди [12], разумеется, приспосабливая их к задачам настоящего исследования.

Ранее теория антипространств была опубликована нами дважды [15, 16]. Предлагаемый материал является расширенным вариантом второй части книги [16], где некоторые (не принципиальные) положения пересмотрены.

Несколько слов о возможной реакции читателя на эту публикацию. Непрофессионал, вероятно, после недолгих раздумий примет все на веру и будет цитировать ее как истину в последней инстанции. Понравится она и философам, так как даст богатую пищу для спекуляций. Иное дело реакция математически подготовленного читателя. Его будут непрерывно раздражать выражения «может быть», «вероятно», «скорее всего» и т. д. Его будет коробить от того, что общие положения «доказываются» на частных примерах. Однако и он не может не согласиться, что в предложенной концепции пространств с не положительным числом измерений «что-то есть», особенно когда ознакомится с п. 3. Во всяком случае, мне кажется, даже для профессионала чтение этой части книги будет достаточно занимательным и стимулирующим опытом.

В лучшем случае эта часть раздела даст стимул к исследованию минус-пространств. А в худшем, станет представителем оригинального литературного жанра — научной фантастики для математиков и физиков.

4.1. Расходящиеся ряды

При дальнейшем изложении мы не будем приводить доказательств (а зачастую они и не существуют), ограничиваясь «практическими рецептами» работы с РР и обращая особое внимание на возможные источники ошибок.

Интерес к использованию РР стал появляться по мере развития анализа, когда обнаружилось, что РР полезны, так как формально выполняемые над ними действия часто приводят к верным результатам, справедливость которых может быть затем проверена независимым способом.

При различных манипуляциях с РР возникает вопрос — какую «сумму» следует приписать расходящемуся выражению? Вот что пишет по этому поводу Эйлер, который часто использовал РР в промежуточных выкладках (цитируется по [12]):

«И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают… вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если слово сумма понимать в смысле результата сложения всех членов. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершено избежим, если мы припишем слову «сумма» значение отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд… При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова «сумма» совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого определения не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы можем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений».

Тем не менее, мы полагаем, что для суммы расходящегося ряда целесообразно использовать специальный термин — *квазисумма.*

А какую квазисумму следует приписать РР в случае, когда конечное выражение, порождающее ряд, неизвестно? Если ряд является числовым, имеются процедуры (например, метод суммирования Чезаро, приведенный ниже), которые во многих случаях позволяют сопоставить РР определенное численное значение квазисуммы.

С философской точки зрения можно рассматривать РР как самостоятельный математический объект, моделирующий какие-то ситуации реального мира. В частности, они могут иметь прямой физический смысл, если наш Мир является бесконечным. Читатель может возразить, что по современным представлениям Вселенная конечна и «имеет форму» трехмерной сферы, расположенной в четырехмерном пространстве. Но отсюда не следует, что нашей Вселенной ограничивается весь Мир. Автор является сторонником бесконечного Мира, полагая, что конечная конструкция не могла бы функционировать наблюдаемым образом.

4.1.1. Расходящиеся односторонние ряды

Рассмотрим основные методы суммирования РР. Запишем следующие известные разложения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k!x^k = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t)dt}{1+xt} \quad (1.3)$$

Метод суммирования РР по Эйлеру (говорят, что ряд Eu-суммируем) состоит в распространении равенств типа (1.1–1.3) на случаи, когда соответствующие разложения расходятся.

В частности, полагая в (1.1) $x=-1$, получаем числовой ряд

$$S = 1-1+1-1+1-... = 1/2 \quad (1.4)$$

суммирование которого интересовало еще Лейбница. Последний правильно «угадал» результат, взяв из метафизических соображений среднее от последовательности частных сумм.

Замечание 1.1. Ряд (1.4) был исторически первым примером, иллюстрирующим тот факт, что логический закон исключенного третьего в общем случае не имеет места применительно к бесконечным множествам.

Замечание 1.2. Отметим, что квазисумму (1.4) можно найти также из функционального уравнения $S = 1-S$.

Полагая в (1.2) $x=-1$, имеем:

$$S = 1-2+3-4+5-... = 1/4 \quad (1.5)$$

Здесь мы встретились с первым замечательным фактом теории РР.

Квазисумма РР, все члены которого являются целыми числами, может быть дробным числом.

Ряд (1.3) расходится при всех $x \neq 0$. Тем не менее, согласно методу Эйлера, при $x=1$ имеем

$$S = 0!-1!+2!-3!+4!-... = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t)dt}{1+t} = 0{,}59635...$$

Здесь, так же как в случае (1.5), квазисумма целых слагаемых оказывается дробным числом.

Положим теперь в (1.1) $x = 2$. Получаем

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... = -1 \quad (1.6)$$

Замечание 1.3. Эта квазисумма может быть найдена также из функционального уравнения $S = 1 + 2S$.

Здесь мы встречаемся со вторым замечательным фактом теории РР. *Квазисумма РР, все члены которого положительны, может быть отрицательной.*

Указанные парадоксальные свойства квазисумм типа (1.5) и (1.6) будут использоваться нами в дальнейшем при обсуждении необычных результатов, относящихся к геометрическим фигурам в антипространствах.

Отметим, что при $x = 1$ из (1.1) получается «истинно расходящийся ряд»

$$S = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... = \infty \quad (1.7)$$

Оказывается, что этот ряд не может быть просуммирован и другими методами теории РР (см. ниже).

Через сорок лет после выхода в свет работ Эйлера, в которых использовались РР, было замечено, что ряд (1.4) может быть получен не только из выражения (1.1), но также из разложения

$$\frac{1 + x + x^2 + ... + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + ... x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - ... \quad (1.8)$$

при любых целых m и n с $m < n$.

Полагая в (1.8) $x = 1$, находим $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = m/n$, что противоречит (1.4). Парадокс был разрешен Лагранжем. Ряд (1.8), рассматриваемый как степенной, имеет пропуски. Так при $m = 2,\ n = 3$ следует записать: $S = 1 + 0 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 - 0 \cdot x^4 - 1 \cdot x^5 + ...$.

При $x = 1$ принцип Эйлера приписывает здесь квазисумму $S = 2/3$ не ряду (1.4), а ряду: $S = 1 + 0 - 1 + 1 - 0 - 1 + ...$.

Таким образом, *РР следует задавать не только последовательностью слагаемых, но также их «местом» в этой последовательности.* Это третий замечательный факт теории РР. Он будет существенным при построении математической теории антипространства.

Замечание 1.4. Похожее явление — зависимость суммы от положения слагаемых — хорошо известно для условно (не абсолютно) сходящихся рядов.

Важным методом нахождения квазисумм РР является метод средних Чезаро. (Последний прекрасно «работает» и для медленно сходящихся рядов.) Назовем $C(1)$ суммой ряда $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ предел последовательности (если она существует)

$$S = \lim_{k \to \infty} \sigma_k \ , \ \sigma_k = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_k}{1 + k} \quad (1.9)$$

где $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$,... — частные суммы.

Процедура Чезаро может выполняться несколько раз, будучи примененной, в свою очередь, к частным выражениям σ_k. При m-кратной процедуре говорят о $C(m)$ суммировании.

Найдем $C(1)$ квазисумму ряда (1.4). Для четных $k = 2m$ и нечетных $k = 2m + 1$ значений k из (4.1.9) получаем соответственно выражения

$$S_{2m} = 1,\ S_{2m+1} = 0; \quad \sigma_{2m} = \frac{m}{1 + 2m},\ \sigma_{2m+1} = \frac{m}{2 + 2m}$$

Видно, что при $m \to \infty\ (k \to \infty)$ будет: $S = \lim_{k \to \infty} \sigma_k \ = 1/2$.

Однако ряд (1.6) не суммируется методом Чезаро, поскольку в соотношении

$$S_k = 2^{k-1} - 1,\ \sigma_k = \frac{2^{k+2} - k - 3}{1 + k}$$

выражение σ_k не имеет конечного предела при $k \to \infty$. Повторяя процедуру Чезаро, мы также приходим к бесконечному значению квазисуммы. Впрочем, заранее было ясно, что такой подход не может дать отрицательного значения величины S, полученного методом Эйлера. Здесь мы встретились с четвертым замечательным фактом, относящимся к теории РР: *различные методы суммирования РР могут приводить к разным результатам.* Это обстоятельство будет использоваться нами при обсуждении физических следствий.

Отметим еще один недостаточно изученный факт. По-видимому, *квазисумма РР, полученная с помощью различных методов суммирования, может иметь лишь конечное число значений, соответствующее числу решений функционального уравнения, которому удовлетворяет квазисумма ряда.*

Для ряда (1.6) имеем $S = 1 + 2S$. Одно из решений (метод Эйлера) $S = -1$. Другое (метод Чезаро) $S = \infty$.

Укажем правила, которые выполняются для РР всегда.

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S\text{, то } \sum_{k=0}^{\infty} const \cdot a_k = const \cdot S \quad (1.10)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k = T\text{, то } \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = S + T \quad (1.11)$$

Степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать в случае, когда выражение, порождающее ряд, остается конечным. Формула (1.2) является первой производной от (1.1). Можно продолжить дифференцирование и получить новые РР. Интегрируя (1.1) сколь угодно раз в пределах $[0, x]$, также получаем новые РР.

Замечание 1.5. Полагая в интегралах и производных от (1.1) $x=1$, получаем множество «истинно расходящихся рядов», например,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \infty,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... = \infty,$$

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + ... = \infty.$$

Таким образом, ряд (1.7) не является в этом отношении уникальным

Нужно помнить, что при формальных операциях с РР источники возможных ошибок чрезвычайно разнообразны. Приведем примеры.

1. Запишем тождество

$$x + (2x^2 - x) + (3x^3 - 2x^2) + (4x^4 - 3x^3) + ... = 0$$

Положим $x = 1$. Тогда имеем $1 + 1 + 1 + ... = 0$, что противоречит (1.7). Источник ошибки — произвольная перестановка членов в степенном ряду.

2. Для дзета-функции Римана имеем разложение

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{\exp(x) - 1} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ... (1.12)$$

которое имеет место при $|s| > 1$. Если положить в (1.12) $\zeta = 0$, формально получаем $1 + 1 + 1 + 1 + ... = \zeta(0) = -1/2$, что противоречит (1.7). Ошибка заключается в том, что ряд (1.12) представляется частным от деления двух расходящихся при $s = 0$ интегралов

$$I(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{\exp(x)-1} \text{ и } \Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

а операция деления расходящихся выражений, как правило, не корректна.

3. Имеются сложности при истолковании квазисуммы степенных разложений от многозначных функций. Например, для $|x|<1$ имеем

$$S=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (1.13)$$

При $x=2$ формально получаем

$S(2)=2+\frac{8}{3}+\frac{32}{5}+\frac{128}{7}+...=\frac{1}{2}[\ln 3-\ln(-1)]=\frac{1}{2}[\ln 3+(2k+1)\pi i],\ \pm k=0,1,2,...$. Помимо того, что квазисумма оказалась комплексной величиной, результат получился неоднозначным. Метод Чезаро дает для $S(2)$ бесконечное значение.

Резюмируя приведенный выше перечень (далеко не полный) возможных ошибок, перечислим еще раз безусловно корректные операции. При манипуляциях с РР можно уверенно пользоваться правилами (1.10) и (1.11) а также достаточно проверенными методами суммирования. Сюда относятся описанные выше метод степенных рядов Эйлера и метод Чезаро, а также другие процедуры (второй метод Эйлера, методы Абеля, Римана, Бореля, Вороного). (см., например, [12].) Можно использовать почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Все другие формальные операции с РР, включая перемножение и деление рядов, могут привести (но не всегда) к ошибкам.

4.1.2. Расходящиеся двухсторонние ряды

Перейдем к описанию двухсторонних расходящихся рядов (ДРР), которые составляют основной математический аппарат теории нуль- и минус-пространств.

Рассмотрим ряд

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^k \quad (1.14)$$

Выполним формальные преобразования:

$$S=\left(...+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)+\left(1+x+x^2+x^3+...\right)=\frac{1}{x}\frac{1}{1-(1/x)}+\frac{1}{1-x}=0 \quad (1.15)$$

Подобный же результат получается при разбиении (1.14) на две или большее количество частей в любом месте.

Таким образом, можно предполагать, что квазисумма ряда (1.14) равна нулю.

Эйлер фактически сформулировал правило: «*сумма любой геометрической прогрессии, продолженной в обе стороны, равна нулю*» и пользовался им в промежуточных выкладках. (Цитируется по [14, с. 312].)

Полагая в (1.15) $x=1$, имеем

$$...+1+1+1+1+1+...=0 \quad (1.16)$$

Обращаем внимание на принципиальное отличие ДРР (1.16) от одностороннего РР (1.7), сумма которого равна бесконечности.

Замечание 1.6. Сейчас уже трудно установить, кому принадлежит замечательная фраза: «Уравнения думают за нас». Не отражает ли результат (1.16) какое-то физическое свойство окружающего мира? В частности, можно интерпретировать последнее следующим художественно-философским образом: Бесконечное множество однородных элементов, равномерно заполняющее всю вещественную ось, ненаблюдаемо.

В первой половине 19 века Д.Ф. Грегори установил следующие формулы, обобщающие (1.15) (цитируется по [12]):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x+k) = 0 \quad (1.17)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \varphi(x+k) = 0 \quad (1.18)$$

а также содержательное соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[\varphi(x+k) - \varphi(x-k)\right] = \varphi'(x) \quad (1.19)$$

которые верны непосредственно или при надлежащем истолковании для интересных классов функции φ.

Из формулы (1.17) при $\varphi = 1$ следует результат (1.16). При этом выражение (1.18) дает

$$\ldots - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0 \quad (1.20)$$

Эта квазисумма может быть также получена из (1.15) при $x = -1$.

В п. 3 мы увидим, что при некоторых условиях имеет место обобщенная формула Грегори

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 0 \quad (1.21)$$

подразумевающая «аналитическую» зависимость a_k от номера.

В качестве примера, когда формулы (1.17) и (1.21) не выполняются, найдем квазисумму ряда Хевисайда

$$S = S(x,p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} \quad (1.22)$$

(Γ — гамма-функция.)

Если p целое число и $p+k+1 \le 0$, то соответствующие члены (1.22) обращаются в нуль, и мы имеем ряд, соответствующий экспоненциальной функции:

$$S(x,p) = \exp x \quad (1.23)$$

В остальных случаях ряд расходится для всех x, но, поскольку при формальном дифференцировании он воспроизводится, естественно допустить, что ряд всегда имеет своей квазисуммой выражение (1.23). Действительно, в книге [12] имеется доказательство того, что для дробных p ряд (1.22) асимптотически сходится к (1.24).

Этот результат противоречит формуле (1.21). Предположительная причина несоответствия заключается в том, что слагаемые ряда (1.22) изменяются «слишком сильно» в зависимости от номера по сравнению с рядом (1.14). К сожалению, мы не можем точно очертить границы применения формул (1.17), (1.18) и (1.21), но опыт показывает, что эти *основополагающие соотношения теории ДРР справедливы, когда члены ряда изменяются «достаточно медленно» по отношению к номеру, в частности как степенная функция.* Это обстоятельство будет использовано в приложениях для «отбраковки» некоторых результатов.

Замечание 1.7. Отметим, что сходящиеся двухсторонние ряды в общем случае не подчиняются правилу (1.21). Например,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{48}$$

Замечание 1.8. До этого почти все приведенные результаты были заимствованы у классиков. Начиная со следующего параграфа и до конца раздела почти весь материал принадлежит автору.

4.1.3. Сумма отрицательного числа членов ряда

Чтобы подойти к понятию антипространства, нам в качестве математического инструмента понадобится выяснить как получить численное значение суммы отрицательного числа членов конечного ряда. Отметим, что Эйлер использовал понятие суммы дробного числа членов, но нам предстоит обобщить это понятие применительно к отрицательным значениям.

Рассмотрим конечную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + ... + \frac{1}{4n^2 - 1} \quad (1.24)$$

Для нее известно замкнутое выражение

$$S_n = \frac{n}{2n+1} \quad (1.25)$$

Естественно приписать сумме нулевого и отрицательного числа членов ряда (1.24) значения, которые следуют из (1.25):

$$S_0 = 0, \quad S_{-1}, \quad S_{-2} = 2/3, \quad S_{-3} = 3/5, ... \quad (1.26)$$

Но как быть, если замкнутое выражение для конечной суммы (4.1.24) не известно?

Будем исходить из формулы (1.21). Запишем выражение для двухстороннего аналога формулы (1.24):

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \left(... + \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \right) + (-1) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + ... \right) = 0 \quad (1.27)$$

Здесь скобками выделены «отрицательная» часть членов ряда, «положительная», а также нулевой член.

Поскольку обе половины ряда (1.27) сходятся, это выражение легко проверить:

$$S = -1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Заметим, что двухсторонний ряд (1.27) имеет сумму равную нулю, что в точности равно сумме нулевого числа членов ряда S_0 в последовательности (1.26). Ниже мы увидим, что это совпадение не случайно.

Если в ряду (1.27) отбросить нулевой член, то получим сумму

$$S_{-1} = S - (-1) = \left(... + \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \right) + 0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + ... \right) = 1$$

соответствующую значению (1.26). Если отбросить слагаемые с $k = 0$ и $k = -1$, находим

$$S_{-2} = S - (-1) - \left(\frac{1}{3} \right) = \left(... + \frac{1}{35} + \frac{1}{15} \right) + 0 + 0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + ... \right) = \frac{2}{3},$$

что также соответствует (1.26).

Продолжая процесс отбрасывания слагаемых, можно убедиться, что эта процедура дает результаты, совпадающие со значениями (1.26). Поэтому можно сформулировать следующее правило:

Сумма нулевого числа членов ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *равна нулю. Сумма* $-m$ $(m \geq 1)$ *членов ряда равна сумме членов с номерами* $0, -1, -2, ... - (m-1)$*, взятой с обратным знаком.*

Точные условия, при которых это правило выполняется, не выяснены, однако опыт нашей работы показывает, что оно справедливо в тех же случаях, что и формула (1.21). Члены ряда должны зависеть от номера «не очень сильно», возможно не сильнее, чем при степенной зависимости. Разумеется, величина a_k должна быть «аналитической» функцией номера и не должна обращаться в бесконечность при целых значениях $\pm k$.

Сформулированное правило позволяет предложить следующую трактовку понятий *нулевое* и *отрицательное* число членов ряда.

Ряд, имеющий 0 *членов, в некотором отношении эквивалентен двухстороннему ряду (1.21). Ряд, имеющий* (-1) *членов соответствует двухстороннему ряду (1.21), где удалено нулевое слагаемое. Ряд, состоящий из* $(-m)$ *членов, эквивалентен двухстороннему ряду, где заменены нулями слагаемые с номерами* $0,-1,-2,...,-(m-1)$.

Именно эта интерпретация позволит нам в дальнейшем оперировать такими понятиями как *нулевое и отрицательное число объектов* (в частности, координатных осей), используя их представление в виде двухсторонних рядов с соответствующими лакунами. Такое «дырочное» представление отрицательного числа предметов напоминает известную концепцию Дирака, рассматривающего позитрон как объект, полученный «изъятием» одного электрона из «равномерного бесконечного фона электронов» [6, с. 378].

Описанную выше процедуру нахождения суммы не положительного числа членов ряда можно строго обосновать пока лишь для случая, когда двухсторонний ряд абсолютно сходится и его сумма равна нулю. (Таковым был пример 1.24).

Положим, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \quad (1.28)$$

т. е. общий член может быть представлен в виде конечной разности, определенной для всех $\pm k = 0,1,2,...$, причем $b_k \to 0$ при $|k| \to \infty$ быстрее, чем $|k|^{-\varepsilon}, \varepsilon > 0$. (В частности, для ряда (4.1.24) $b_k = -1/[2(2k-1)]$.)

Из (1.28) формально следует, что

$$S_0 = b_1 - b_1 = 0, \quad S_{-1} = b_0 - b_1, \quad S_{-2} = b_{-1} - b_1, ... \quad (1.29)$$

С другой стороны, согласно предложенному выше подходу, имеет место равенство

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = ... + (b_{-2} - b_{-3}) + \\ + (b_{-1} - b_{-2}) + (b_0 - b_{-1}) + (b_1 - b_0) + .. = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Из (1.30) следует, что $S_0 = 0$. Вычитая из этой суммы член $(b_1 - b_0)$, получаем $S_{-1} = b_0 - b_1$. Вычитая два слагаемых $(b_1 - b_0) + (b_0 - b_{-1})$, находим $S_{-2} = b_{-1} - b_1$ и т. д., что дает результаты в точности совпадающие с (1.29).

Проверим сформулированное выше правило применительно к ряду, который, будучи бесконечно продолжен, расходится. Рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1.31)$$

Из (1.31) формально находим

$$S_0 = 0, \quad S_{-1} = 0, \quad S_{-2} = -1, \quad S_{-3} = -5, \quad S_{-4} = -14, ... \quad (1.32)$$

Формула (1.21) дает

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 = ... + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + ... = 0 \quad (1.33)$$

Имеем $S_0 = S = 0$. Вычитая нулевой член, находим $S_{-1} = 0$. Вычитая последовательно сумму слагаемых с номерами $0,-1,-2,...$, получаем в точности значения (1.32), полученные формальным использованием конечной суммы (1.31).

Ряд (1.33) симметричен по отношению к замене $k \to -k$. Поэтому целесообразно проверить сформулированное правило для «антисимметричного» случая

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = n^2 + 2n \quad (1.34)$$

Формально находим

$$S_0 = 0, \quad S_{-1} = -1, \quad S_{-2} = 0, \quad S_{-3} = 3, \quad S_{-4} = 8, \ldots \quad (1.35)$$

Запишем соответствующий сумме (1.34) ряд (1.21):

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(2k+1) = \ldots -5-3-1+1+3+5+7+\ldots = 0$$

Исключая последовательно слагаемые $k = 0, -1, -2, \ldots$, получаем в точности значения (1.35).

Читатель может сам проверить предложенное правило суммирования не положительного числа членов для конечных сумм, имеющих замкнутое выражение. Например,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3) - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^4 = \frac{(-1)^n}{2} n(n^3 + 2n^2 - 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k-1)x = \frac{1 - \cos x - \cos nx + \cos[(n-1)x]}{2(1-\cos x)}$$

Однако применительно к ряду

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

предложенная методика неверна, в чем можно убедиться прямой проверкой. Причина несоответствия в том, что два члена ряда

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

при $k = -1$ и $k = -2$ имеют бесконечные значения. Подобное же расхождение читатель может проверить для суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Замечание 1.9. Предложенная методика может быть использована для нахождения конечной части расходящихся интегралов, основы теории которых имеются в [12].

Запишем формулу [8, с. 604]

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=arctg\,x-x+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n+2}dt}{t^2+1}\quad(1.36)$$

Полагая в правой части (1.36) $n=0$, получаем $S_0=0$. Для $n=-1$ находим $S_{-1}=-x$. Однако в случае $n=-2$ интеграл в (1.36) расходится. Вычислив последний в пределах $[\varepsilon,x]$, находим

$$S_{-2}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{x}-x+O(\varepsilon)\quad(1.37)$$

С другой стороны, рассматривая двухсторонний ряд

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=0\quad(1.38)$$

получаем $S_0=0$, а вычитая последовательно слагаемые с номерами $k=0,-1$, приходим к выражениям $S_{-1}=-x,\quad S_{-2}=-\frac{1}{x}-x$

Значения S_0 и S_{-1} совпадают с найденными выше, а величина S_{-2} дает правильное выражение для конечной части формулы (1.37).

4.1.4. Аксиоматика двухсторонних расходящихся рядов

Выше была фактически представлена необычная арифметика для операций с отрицательным числом объектов. Основанием для ее введения были специфические свойства ДРР. Однако эту арифметику можно построить аксиоматически, без какого-либо первоначального обоснования, имея в виду дальнейшее сопоставление с различными следствиями. Фактически, для целей настоящей работы достаточно использовать следующие аксиомы:

1. $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k=0$

2. Если $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ и $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k$, то $S_0=\sum_{k=1}^{0}a_k=S=0$

3. Если $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, то $S_{-m}=\sum_{k=1}^{-m}a_k=S-\sum_{k=0}^{-m+1}a_k=-\sum_{k=0}^{-m+1}a_k,\quad m\ge 1$

4. Если $S=\sum_k a_k,\quad T=\sum_k b_k$, то $S+T=\sum_k(a_k+b_k)$

(Символ $\sum_k$ подразумевает любые, а не только двухсторонне-бесконечные суммы.)

5. Если $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k$, то $\sum_{k=-\infty}^{m-1}a_k+(a_k+b)+\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k=S+b=b$

6. Если $S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(x)$, то $\frac{d}{dx}S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)\quad(1.39)$

Правило умножения на постоянную является следствием четвертой аксиомы:

Если $S=\sum_k a_k$, то $const\cdot\sum_k a_k=\sum_k const\cdot a_k\quad(1.40)$

Первая аксиома вводит понятие *содержательного нуля,* представляемого двухсторонним рядом, который может быть и сходящимся и расходящимся. Вторая утверждает, что конечная сумма с нулевым числом членов тождественна содержательному нулю. Третья постулирует, что конечная сумма с отрицательным числом слагаемых $-m\ (m>0)$ может быть представлена содержательным нулем из которого изъяты слагаемые с соответствующими номерами. Четвертая аксиома тривиальна. Из нее следует также возможность почленного интегрирования. Пятая очень важна, так как дает возможность складывать «аналитический» ряд с конечным выражением. Почленное дифференцирование устанавливается шестой аксиомой.

Мы не знаем достаточных условий применимости всех аксиом (1.39), но можем указать ориентировочно некоторые из них.

Величина a_k должна быть аналитической функцией номера k. При этом зависимость от k не должна быть «слишком сильной». Кроме того, величины a_k не должны обращаться в бесконечность при целых значениях $\pm k$.

Насколько «слабой» должна быть зависимость a_k от номера, доподлинно не известно. Рассмотренные выше примеры позволяют предположить, что для степенной функции аксиомы справедливы, а для экспоненциальной нет.

Замечание 1.10. Дадим пример использования аксиомы 5. Если $...+1+1+1+1+1+...=0$, то $...+1+1+1+2+1+1+...=1$. Пример подчеркивает, что не всякий двухсторонний ряд имеет суммой нуль, а только удовлетворяющий условию «аналитичности» по отношению к номеру.

Замечание 1.11. Разумеется, не подчиняется аксиоме 1 ДРР, разные части которого «образованы» различными формулами. Например, $(...+1+1+1+1)+(1+2+4-8+...)\neq 0$.

Замечание 1.12. Напомним еще раз одно важное обстоятельство. Детализируем выражение (1.21) и его следствия:

$$...+a_{-2}+a_{-1}+a_0+a_1+a_2+...=0$$

$$...+a_{-2}+a_{-1}+0+a_1+a_2+...=-a_0$$

$$...+a_{-2}+0+0+a_1+a_2+...=-a_{-1}-a_0 \quad (1.41)$$

Согласно сказанному в п. 1.1, сохранение «места» отброшенного члена в виде слагаемого равного нулю обязательно для расходящихся рядов.

Дадим «философскую» перефразировку предложенной концепции нулевого и отрицательного числа объектов.

Нулевым количеством объектов является их «двухсторонне-бесконечное количество», которое в некоторых операциях не наблюдаемо. Отрицательное количество объектов может быть смоделировано изъятием из двухстороннего бесконечного ненаблюдаемого количества конечного числа объектов с обязательным сохранением их места.

Замечание 1.13. Несколько слов о дифференцировании и интегрировании ДРР. Запишем еще раз ряд (4.1.15):

$$S=...+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+... \quad (1.42)$$

Дифференцируя (4.1.42), приходим к правильному результату без каких-либо осложнений:

$$\frac{dS}{dx}=\left(...-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)+(0)+\left(1+2x+3x^2+4x^3+...\right)= \quad =-\frac{1}{x^2}\frac{1}{[1-(1/x)]^2}+0+\frac{1}{(1-x)^2}=0$$

(1.43)

Обращаем внимание, что ряд (1.43) принадлежит к тому же классу, что и (1.42), — его члены могут быть представлены одной формулой, аналитической по отношению к номеру: $a_k=kx^{k-1}$.

Проинтегрировав ряд (1.42) в пределах $[a,x]$, находим

$$\int_a^x S dx = \left[\left(\ldots - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \right) + (\ln x) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right) \right]_a^x =$$

$$= \left[\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln x - \ln(1-x) \right]_a^x = \left[\ln\frac{1}{x} + \ln(x-1) + \ln x - \ln(1-x) \right]_a^x =$$

$$= \left[\ln\frac{x-1}{1-x} \right]_a^x = \ln\frac{x-1}{1-x} - \ln\frac{a-1}{1-a} = \ln\left[\left(\frac{x-1}{1-x}\right)\left(\frac{1-a}{a-1}\right) \right] = \ln 1 = 0 \quad (4.1.44)$$

Результат получился верным. Однако ряд (1.44) уже не принадлежит к рассматриваемому классу — он не может быть представлен единой формулой, где a_k зависит от k аналитически. Поэтому дальнейшее интегрирование с сохранением соотношения (1.21) невозможно.

Отсюда следует, что операция интегрирования требует дополнительных предосторожностей по сравнению с дифференцированием. (При манипуляциях со сходящимися рядами, напротив, интегрирование гораздо «безопаснее» дифференцирования.)

Замечание 1.14. Проиллюстрируем еще раз одну из основных особенностей РР и ДРР — зависимость значения квазисуммы от позиции слагаемых (см. п. 1.1).

Рассмотрим два ряда

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos kx = 0 \ \text{ и } \ S_2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = 2\pi\delta(x - 2\pi s), \quad \pm s = 0,1,2,\ldots$$

которые отличаются лишь группировкой членов. Квазисумма первого равна нулю в силу (1.21), а сумма второго (представляющая Фурье-разложение периодической дельтаобразной функции, «гребенки»), равна нулю почти всюду, за исключением точек $x = 2\pi s$, где $S_2 = \infty$. Таким образом, $S_1 \neq S_2$. Расхождение происходит по той же причине, по которой имеет место неравенство $\ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = 0 \neq 2(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots) = \infty$.

4.1.5. Некоторые обобщения

1. Полученные выше результаты естественным образом могут быть распространены на случаи рядов любой кратности. В частности, для двойных рядов имеем

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad = 0 \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Изымая один элемент, получаем

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + \ldots = -1 \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Последнее равенство выполняется при различном порядке суммирования — по строкам, по столбцам или по диагоналям.

2. Аксиомы (1.39) дают возможность установить правила обращения с двухсторонними бесконечными произведениями (ДРП) и конечными произведениями, имеющими не положительное (целое) число множителей. Поскольку произведения при логарифмировании

превращаются в суммы, из (1.39) следует, что при некоторых условиях имеют место формулы

1. $P = \prod_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1$

2. Если $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, то $P_0 = \prod_{k=1}^{0} a_k = P = 1$

3. Если $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, то $P_{-m} = P \Big/ \prod_{k=0}^{-m+1} a_k = 1 \Big/ \prod_{k=0}^{-m+1} a_k, \quad m \ge 1$

4. Если $P = \prod_{k} a_k, \quad Q = \prod_{k} b_k$, то $PQ = \prod_{k} (a_k b_k)$

(Символ $\prod_{k} a_k$ подразумевает, что произведения могут быть любыми, том числе конечными.)

5. Если $P = \prod_{k=-\infty}^{\infty} a_k$, то $\prod_{k=-\infty}^{m-1} a_k \cdot (a_m \cdot const) \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} a_k = P \cdot const = const$ (1.45)

Условия применимости формул (1.45) проверяются после логарифмирования и сведения к операции суммирования. Однако мы не можем утверждать наверняка, что отсутствуют еще какие-то дополнительные ограничения, так как наш опыт работы с ДРП гораздо меньше, чем с ДРР.

4.2. Антипространства

Будем исходить из известного выражения для квадрата расстояния между двумя точками в обыкновенном n-мерном пространстве

$$l_{1,2}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 \quad (2.1)$$

где $(x_k)_1$ и $(x_k)_2$ — декартовы координаты точек 1 и 2, соответственно.

4.2.1. Метрика нуль- и минус-пространств

Согласно концепции нулевого числа членов конечной суммы (см. пп. 1.3 и 1.4), естественно предположить, что для нульмерного пространства (мы пока еще не знаем, что это такое) имеет место метрика в форме ДРР:

$$l_{1,2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 \quad (2.3)$$

Таким образом, число взаимно ортогональных координатных осей для 0-пространства бесконечно.

Для (-1)-мерного пространства запишем метрику в виде ДРР с одной лакуной:

$$l_{1,2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 + 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 \quad (2.3)$$

Для $n = -m$ $(m \ge 1)$ числа измерений имеем ДРР с m лакунами:

$$l_{1,2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{-m} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 + \sum_{k-0}^{-m+1} 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(x_k)_1 - (x_k)_2 \right]^2 \quad (2.4)$$

4.2.2. Решение уравнений в антипространствах

Проверим, согласуются ли введенные определения метрики антипространств (2.2)–(2.4) с экстраполяцией известных формул для обычного n-мерного пространства в область не положительных значений n.

Дифференциальный оператор Лапласа, который в обычном n-мерном пространстве имеет вид

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (2.5)$$

для 0-мерного пространства, в соответствии с пп. 1.3 и 1.4, запишем следующим образом:

$$\Delta_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (2.6)$$

Для (-1)-мерного пространства имеем

$$\Delta_{-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (2.7)$$

Для $n = -m \ (m \ge 1)$ числа измерений таким же образом запишем

$$\Delta_{-m} = \sum_{k=-\infty}^{-m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (2.8)$$

Уравнение Лапласа в n-мерном пространстве для сферически симметричного случая имеет вид

$$\Delta_n \Psi = 0, \quad \Delta_n = r^{1-n} \frac{d}{dr} r^{n-1} \quad \Psi = \Psi(r), \quad r \in (0, \infty) \quad (2.9)$$

Нетривиальные решения последнего существуют для всех $n \in (-\infty, \infty)$. В частности, одним из решений являются функции

$$\Psi = r^{2-n}, \quad n \in (-\infty, 2), (2, \infty), \ \Psi = \ln r, \quad n = 2 \quad (2.10)$$

Найдем решения уравнения (2.9) в декартовых координатах применительно к не положительным значениям n. Для нульмерного пространства в соответствии с (2.6) запишем

$$\left(\ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{-2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{-1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots \right) \Psi = 0 \quad (2.11)$$

Согласно (2.10) и (2.2) при $n = 0$ уравнению (2.11) должна удовлетворять функция

$$\Psi = r^2 = \ldots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots . \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11), убеждаемся, что ряд (2.12) действительно является решением, так как, в соответствии с (1.20) или (1.39),

$$\Delta_0 \Psi = \ldots + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + \ldots = 2(\ldots + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots) = 0 \quad (2.13)$$

Для случая (-1)-пространства уравнение Лапласа в подробной записи имеет вид (см. (2.7))

$$\left(\ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{-2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{-1}^2} + 0 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots \right) \Psi = 0 \quad (2.14)$$

Следует проверить, удовлетворяет ли уравнению (2.14) функция (2.10)

$$\Psi = r^3 = \left(\ldots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots \right)^{3/2} \quad (2.15)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} = 3rx_k\,, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k^2} = \frac{3x_k^2}{r} + 3r \qquad (2.16)$$

после подстановки (2.16) в (2.14), находим

$$\begin{gathered}\Delta_{-1}\Psi = (3/r)\left(\ldots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + 0 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots\right) + \\ +3\left(\ldots + r + r + 0 + r + r + \ldots\right)\end{gathered} \qquad (2.17)$$

Согласно (2.3) или (2.15) первая группа слагаемых дает $(3/r)r^2 = 3r$, а вторая группа членов имеет сумму $-3r$. Таким образом, функция (2.15) действительно является решением уравнения $\Delta_{-1}\Psi = 0$.

Для произвольного отрицательного значения $n = -m\ (m \geq 1)$ должно быть

$$\Psi = r^{2+m} = \left(\ldots + x_m^2 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + x_1^2 + \ldots\right)^{(2+m)/2} \qquad (2.18)$$

(В ряду (2.18) m лакун.)

Так как

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} = (2+m)r^m x_k\,, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k^2} = (2+m)mr^{m-2} + (2+m)r^m$$

имеем

$$\Delta_{-n}\Psi = (2+m)mr^{m-2}\left(\ldots + x_{-m}^2 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + x_1^2 + \ldots\right) +$$

$$+(2+m)r^m\left(\ldots + 1 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + 1 + \ldots\right) = (2+m)mr^m - (2+m)mr^m = 0\,.$$

Таким образом, *для произвольного значения* $n = -m\ (m \geq 0)$ *установлена взаимная непротиворечивость аксиом (1.39) и выражений (2.2)–(2.4), (2.6)–(2.8), т. е. концепциям не положительного числа объектов и минус-метрики.* Образно говоря, предложенная теория выдержала первую «опытную проверку».

Замечание 2.1. Очевидно, что второе (тривиальное) решение уравнения (2.9) $\Psi = const$ также удовлетворяется для всех $n \leq 0$, так как оператор (2.8) обращает постоянную в нуль.

Выполним процедуру проверки для уравнения Гельмгольца.

$$\left(\Delta_n - a^2\right)\Psi = 0, \quad \Delta_n = r^{1-n}\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr}\,,$$

$$\Psi = \Psi(r), \quad r \in (0,\infty), \quad a^2 = const > 0 \quad (2.19)$$

Для $n \in (-\infty,\infty)$ одно из решений имеет вид

$$\Psi = r^{\nu}K_{\nu}(ar), \quad \nu = (2-n)/2 \quad (2.20)$$

где K_{ν} — функция Макдональда.

Применительно к случаю $n = 0$ общее выражение (2.20) дает

$$\Psi = rK_1(ar), \quad r = \left(\ldots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots\right)^{1/2} \quad (2.21)$$

Так как

$$\frac{d}{dz}K_0(z) = -K_1(z), \quad \frac{d}{dz}K_1(z) = -\frac{1}{z}K_1(z) - K_0(z)\,,$$

из (2.21) получаем

$$\frac{d\Psi}{dx_k}=-aK_0(ar)x_k,\quad \frac{d^2\Psi}{dx_k^2}=-aK_0(ar)+\frac{a^2}{r}K_1(ar)x_k^2 \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в уравнение (2.19), где оператор Лапласа задан выражением (2.11), запишем

$$\left(\Delta_0-a^2\right)\Psi=-aK_0(ar)(...+1+1+1+...)+$$
$$+\left(a^2/r\right)K_1(ar)\left(...+x_{-1}^2+x_0^2+x_1^2+...\right)-a^2rK_1(ar) \quad (2.23)$$

Первый фрагмент в правой части (2.23) обращается в нуль в силу (1.16), а два последних взаимно уничтожаются, так как сумма квадратов координат равна квадрату радиуса. Поэтому действительно $\left(\Delta_0-a^2\right)\Psi=0$.

Для случая $n=-1$ решение (2.20) имеет вид

$$\Psi=r^{3/2}K_{3/2}(ar),\quad r=\left(...x_{-2}^2+x_{-1}^2+0+x_1^2+x_2^2+...\right)^{1/2} \quad (2.24)$$

Функции Макдональда полуцелого индекса выражаются через элементарные функции. Поэтому с точностью до постоянного множителя вместо (2.24) можно записать

$$\Psi=(1+ar)\exp(-ar) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}=-a^2\exp(-ar)x_k,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k^2}=-a^2\exp(-ar)+\left(a^3/r\right)\exp(-ar)x_k^2 \quad (2.26)$$

Подставляя (2.25) в (2.19), где оператор Лапласа задается посредством (2.14), получаем

$$\left(\Delta_{-1}-a^2\right)\Psi=-a^2\exp(-ar)(...+1+1+0+1+1+...)+$$
$$+\left(a^3/r\right)\exp(-ar)\left(...+x_{-2}^2+x_{-1}^2+0+x_1^2+x_2^2\right)-a^2(1+ar)\exp(-ar).$$

Согласно (1.39) первая группа слагаемых имеет сумму $a^2\exp(-ar)$, а вторая в силу (2.24) равна $a^3r\exp(-ar)$. Поэтому убеждаемся, что $\left(\Delta_{-1}-a^2\right)\Psi=0$.

Рассмотрим общий случай $n=-m$ $(m\geq 1)$. Проверим решение (2.20), где $\nu=(2+m)/2$.

Так как

$$\frac{d}{dz}K_\nu(z)=-\frac{\nu}{z}K_\nu(z)-K_{\nu-1}(z),$$

имеем

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}=-ar^{\nu-1}K_{\nu-1}(ar)x_k,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k^2}=-ar^{\nu-1}K_{\nu-1}(ar)+a^2r^{\nu-2}K_{\nu-2}(ar)x_k^2,$$

$$\left(\Delta_{-n}-a^2\right)\Psi=-ar^{m/2}K_{m/2}(ar)\left(...+1+\sum_{k=-m+1}^{0}0+1+...\right)+$$
$$+a^2r^{(m-2)/2}K_{(m-2)/2}(ar)\left(...+x_{-m}^2+\sum_{k=-m+1}^{0}0+x_1^2+...\right)-a^2r^{(m+2)/2}K_{(m+2)/2}(ar) \quad (2.27)$$

Поскольку

$$\left(...+1+\sum_{k=-m+1}^{0}0+1...\right)=-m,\ \text{а}\ \left(,,,+x_{-m}^2+\sum_{k=-m+1}^{0}0+x_1^2+...\right)=r^2,$$

из (2.27) находим

$$\left(\Delta_{-n}-a^2\right)\Psi=mar^{m/2}K_{m/2}(ar)+a^2r^{(m+2)/2}\left[K_{(m-2)/2}(ar)-K_{(m+2)/2}(ar)\right] \quad (2.28)$$

В силу известного соотношения

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z)$$

из (2.27) окончательно получаем

$$\left(\Delta_{-n}-a^2\right)\Psi = mar^{m/2}K_{m/2}(ar)-2\frac{m}{2}a^2\frac{r^{(m+2)/2}}{ar}K_{m/2}(ar)=0 \quad (2.29)$$

Тем самым взаимная непротиворечивость концепций отрицательного числа объектов и минус-метрики подтверждена также решением уравнения Гельмгольца.

Рассмотренные выше уравнения (2.9) и (2.19) в значительной мере однотипны, а первое даже является частным случаем второго. Поэтому представляется необходимым исследовать уравнение с переменным коэффициентом

$$\left(\Delta_n-a^2r^{-2}\right)\Psi=0,\quad \Delta_n=r^{1-n}\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr},\ \Psi=\Psi(r),\quad r\in(0,\infty) \quad (2.30)$$

Его решениями являются функции

$$\Psi=r^{\nu},\quad \nu=\frac{2-n}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2-n}{2}\right)^2+a^2} \quad (2.31)$$

Для нульмерного пространства $(n=0)$ имеем

$$\nu=1\pm\sqrt{1+a^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}=\nu r^{\nu-2}x_k,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k^2}=\nu r^{\nu-2}+\nu(\nu-2)r^{\nu-4}x_k^2 \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в (2.30), где оператор Δ_0 задается выражением (2.11), получаем

$$\left(\Delta_0-a^2r^{-2}\right)\Psi=$$
$$=\nu r^{\nu-2}(...+1+1+1+...)+\nu(\nu-2)r^{\nu-4}\left(...+x_{-1}^2+x_0^2+x_1^2+...\right)-a^2r^{\nu-2}$$

Это выражение обращается в нуль для величины ν, имеющей значение (2.32).

Для $n=-1$ аналогичным образом находим

$$\nu=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+a^2} \quad (2.34)$$

$$\left(\Delta_{-1}-a^2r^{-2}\right)\Psi=$$
$$=\nu r^{\nu-2}(...+1+0+1+...)+\nu(\nu-2)r^{\nu-4}\left(...+x_{-1}^2+0+x_1^2+...\right)-a^2r^{\nu-2}.$$

Последнее выражение равно нулю при значениях ν, задаваемых формулой (2.34).

Аналогичное рассмотрение легко выполнить для любых $n=-m\ (m\geq 1)$. Имеем

$$\left(\Delta_{-n}-a^2r^{-2}\right)\Psi=\nu r^{\nu-2}\left(...+1+\sum_{k=-m+1}^{0}0+1+...\right)+$$
$$+\nu(\nu-2)r^{\nu-4}\left(...+x_{-m}^2+\sum_{k=-m+1}^{0}0+x_1^2+...\right)-a^2r^{\nu-2}=$$
$$-\nu mr^{\nu-2}+\nu(\nu-2)r^{\nu-2}-a^2r^{\nu-2} \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) действительно обращается в нуль при значениях

$$\nu=\frac{2+m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2+m}{2}\right)^2+a^2}$$

(см. 1.39).

В качестве следующего шага проверки предложенных гипотез рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta_n\Psi - r^{-\nu-2}\Psi^2 = 0, \quad \Delta_n = r^{1-n}\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr},$$
$$\Psi = \Psi(r), \quad r \in (0,\infty) \quad (2.36)$$

Его решениями являются функции

$$\Psi = r^{\nu}, \quad \nu = \frac{2-n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2-n}{2}\right)^2 + 1} \quad (2.37)$$

Любопытно, что решения (2.37) совпадают с (2.31), где $a = 1$. Поэтому сохраняют силу формулы (2.33).

Для $n = 0$ имеем $\nu = 1 \pm \sqrt{2}$. Следовательно

$$\Delta_0\Psi - r^{-\nu-2}\Psi^2 = \left(1 \pm \sqrt{2}\right) r^{\nu-2}\left(\ldots + 1 + 1 + 1 + \ldots\right) +$$
$$+ r^{\nu-4}\left(\ldots + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + \ldots\right) - r^{\nu-2} = 0$$

Если $n = -1$, таким же образом запишем

$$\Delta_{-1}\Psi - r^{-\nu-2}\Psi^2 = \nu r^{\nu-2}\left(\ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots\right) +$$
$$+ \nu(\nu-2) r^{\nu-4}\left(\ldots + x_{-1}^2 + 0 + x_1^2 + \ldots\right) - r^{\nu-2}.$$

Последнее равно нулю при $\nu(\nu-2) - \nu - 1 = 0$, т. е. $\nu = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, что в точности согласуется с формулой (2.37).

Для произвольного (целого) значения $n = -m \ (m \geq 1)$ запишем

$$\Delta_{-n}\Psi - r^{-\nu-2}\Psi^2 = \nu r^{\nu-2}\left(\ldots + 1 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + 1 + \ldots\right) +$$
$$+ \nu(\nu-2) r^{\nu-4}\left(\ldots + x_{-m}^2 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + x_1^2 + \ldots\right) - r^{\nu-2}$$

Это выражение равно нулю, если $\nu(\nu-2) - m\nu - 1 = 0$, т. е. когда

$$\nu = \frac{2+m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2+m}{2}\right)^2 + 1}$$

что совпадает со значением (2.37).

Таким образом, взаимная непротиворечивость наших концепций подтверждена решением четырех уравнений трех различных типов.

4.3. Правильные фигуры в антипространствах

К сожалению, мы пока не научились исследовать «тела» в нуль- и минус-пространствах исходя непосредственно из метрики (2.2), (2.4). В основном будут экстраполироваться закономерности, которые для плюс-пространств (обычных пространств) имеют аналитическое выражение как функцию числа измерений. (Подобная экстраполяция успешно использовалась в п. 2 по отношению к дифференциальным уравнениям). При этом выявляются многочисленные парадоксы — результаты, не имеющие наглядной интерпретации и резко противоречащие обыденным представлениям.

4.3.1. Куб

«Объем» обычного n-мерного куба со стороной h равен произведению

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} h = h^n \quad (3.1)$$

Для 0-пространства, беря нуль раз произведение сторон согласно (1.45), имеем

$$V_0 = \prod_{k=-\infty}^{\infty} h = ...hhhhh... = 1 \quad (3.2)$$

Для (-1)-пространства, используя представление о (-1)-ом числе множителей (см. (1.45)), находим

$$V_{-1} = ...hh \cdot 1 \cdot hh... = h^{-1} \quad (3.3)$$

Аналогичным образом, заменяя единицами $m = -n$ множителей ДРП (1.2), получаем выражение для «объема» $(-n)$-куба

$$V_{-m} = V_n = h^{-m} = h^n \quad (3.4)$$

Формула (3.4) показывает, что зависимость (3.1) может быть аналитически продолжена в область не положительных значений n.

Выражения (3.2)–(3.4), несмотря на свою простоту, дают много пищи для размышлений. Замечательно, что «объем» 0-куба всегда равен единице, независимо от единиц измерения. В настоящее время мы не знаем, что это означает физически. Возможно, существует исключительная мера, связанная с наличием в природе «фундаментальной длины». Но, скорее всего, это какое-то специфическое свойство нуль-пространства.

Согласно (3.4), при $n \le 1$ чем больше куб, тем меньше его «объем». Это может означать, что меньшее по «объему» тело каким-то образом составлено из «тел» больших размеров. (см. Гипотезу 4) Не потому ли минус-тела не наблюдаются в макромире, что их «объем» слишком мал?

Площадь «поверхности» обычного n-мерного куба равна

$$S_n = 2nh^{n-1} \quad (3.5)$$

(Под площадью «поверхности» n-куба мы подразумеваем сумму «объемов» его $(n-1)$-мерных граней.)

Замечание 3.1. На первый взгляд не понятен случай $n = 1$, когда куб является отрезком. При этом $S_1 = 2$. Однако, поскольку отрезок имеет две концевые точки являющиеся 0-мерными объемами, каждый из которых равен единице, этот результат согласуется с (3.2).

Экстраполируем формулу (3.5) на случаи $n \le 0$. Из (3.5) следует, что площадь поверхности нуль-куба равна нулю. Это заключение еще не говорит об отсутствии «поверхности». Площадь может быть образована «ненаблюдаемыми квазисуммами» каких-то элементов в соответствии с равенствами типа $... + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... = 0$ или $... + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = 0$.

При $n \le 1$ $S_n < 0$. Можно предложить несколько вариантов интерпретации отрицательного значения площади.

— Поверхность минус-тела суть сумма двухстороннего бесконечного числа поверхностей с «дырками». Образ этой ситуации мы постоянно встречаем в настоящей работе (см., например, 1.41).

— Отрицательной может быть и квазисумма РР с положительными слагаемыми (см. 1.6).

— Поверхность ориентирована «в обратную сторону», т. е. расположена «внутри куба». При этом минус-куб «простирается» в бесконечность какого-то недоступного нам пространства, а внутренняя поверхность соприкасается с наблюдаемым Миром.

При такой интерпретации находит объяснение обратная зависимость «объема» минус-тела от размера.

Длина диагонали обычного n-куба выражается формулой

$$d_n = \left(\sum_{k=1}^{n} h^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}h \quad (3.6.)$$

Согласно (1.39) в 0-пространстве имеет место равенство

$$d_0 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2 \right)^{1/2} = 0 .$$

Исключая из бесконечной суммы $m = -n$ слагаемых (с сохранением позиций этих слагаемых), получаем выражение для длины диагонали куба в пространстве не положительной размерности:

$$d_{-m} = d_n = \left(\sum_{k=-\infty}^{-m} h^2 + \sum_{k=-1+m}^{0} h^2 + \sum_{k=1}^{\infty} h^2 \right)^{1/2} = \sqrt{-m}h = \sqrt{n}h .$$

Последнее показывает, что зависимость (3.6) может быть аналитически продолжена в область $n \le 0$. При этом $d_0 = 0$, а для отрицательных значений n получаем мнимую величину. Нет необходимости привлекать для интерпретации мнимой длины время. Мы уже встречались ранее с ситуацией, когда квазисумма РР с положительными слагаемыми оказывалась комплексной (см. пример 1.13). Возможно также толкование аналогичное тому, которое было сделано выше применительно к площади поверхности куба — диагональ «находится» вне минус-куба.

4.3.2. Шар

«Объем» обычного n-мерного шара радиуса R дается формулой

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma[(n/2)+1]} R^n \quad (3.7)$$

Γ — гамма-функция.

Будем полагать, что зависимость (3.7) может быть аналитически продолжена в область не положительных значений n. (В п. 3.1 такая возможность была продемонстрирована для куба.)

Для частных значений n находим

$$\begin{gathered} V_0 = 1; \quad V_{-1} = \frac{1}{\pi R}; \quad V_{-2} = 0; \quad V_{-3} = -\frac{1}{2\pi^2 R^3}; \\ V_{-4} = 0; \quad V_{-5} = \frac{3}{4\pi^2 R^5}; \ldots \end{gathered} \quad (3.8)$$

Замечание 3.2. Нет полной уверенности, что мы правильно вычислили величины $V_{-2}, V_{-4}, \ldots, V_{-2m}$. Возможно, гамма-множитель в (3.7) при $n = -2m$ следует трактовать как полусумму

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{n+\varepsilon}{2}+1\right) + \Gamma\left(\frac{n-\varepsilon}{2}+1\right)\right], \quad \varepsilon \to 0 \quad (3.9)$$

которая имеет конечное значение.

Замечание 3.3. Зависимость (3.7) для $n \ge 0$ может быть представлена конечным произведением [11, с. 392]

$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\pi \Gamma(k+1) R}{2^n \Gamma^2[(k/2)+1]}$$

Согласно формулам (4.1.45), для вычисления значений V_n применительно к $n \le 0$ следует записать ДРП

$$V_n = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi\Gamma(k+1)R}{2^n \Gamma^2[(k/2)+1]} = 1$$

и последовательно заменить единицами множители $k = 0,-1,-2,\ldots$.

Однако эта операция не корректна, так как некоторые множители (в частности $k = -1$) обращаются в бесконечность.

Площадь «поверхности» обычной n-сферы дается выражением

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} R^{n-1} \quad (3.10)$$

которое, будучи применено к не положительным значениям n, дает

$$S_0 = 0, \quad S_{-1} = -\frac{1}{\pi R^2}, \quad S_{-2} = 0, \quad S_{-3} = \frac{3}{2\pi^2 R^4}, \quad S_{-4} = 0, \quad S_{-5} = -\frac{15}{4\pi^3 R^6}, \ldots \quad (3.11)$$

Об истолковании нулевых и отрицательных значений V_n и S_n достаточно было сказано выше применительно к n-кубу (см. также Замечание 1 этого параграфа).

Запишем уравнение обычной n-сферы:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

Естественно предположить, что его аналог для нульмерного случая имеет вид

$$\ldots + x_{-2}^2 + x_{-1}^2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots = R^2 \quad (3.12)$$

а для $n = -m \ (m > 0)$

$$\ldots + x_{-m-1}^2 + x_{-m}^2 + \sum_{k=-m+1}^{0} 0 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots = R^2 \quad (3.13)$$

Положим, что все координаты точки сферы одинаковы, так что $x_k = a$. При этом из (3.12) и (3.13) получаются не вполне понятные выражения

$$0 = R^2 \quad (3.14)$$

$$-ma^2 = R^2 \quad (3.15)$$

Равенство (3.14) как будто означает, что в нульмерном пространстве радиус любой сферы равен нулю. Однако существует бесконечное множество точек, для которых уравнение (3.12) удовлетворяется без каких-либо оговорок. Отсюда следует, что нуль-сфера (если таковая существует) совершенно не похожа на обычную, но имеет какую-то достаточно сложную форму.

Формулу (3.15) объяснить проще, нежели (3.14), хотя и здесь имеется тот же парадокс, что и при нахождении диагонали куба, — величина R оказывается мнимой. Наиболее перспективным нам представляется полагать, что сфера «вывернута наизнанку» и радиус находится вне сферы.

4.3.3. Тетраэдрон

«Объем» правильного n-мерного симплекса со стороной h дается формулой

$$V_n = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}\frac{h^n}{\Gamma(n+1)} \quad (3.16)$$

«Площадь» боковой «поверхности» легко находится из (3.16), так как «грани» также являются правильными симплексами:

$$S_n = (n+1)V_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}\frac{n+1}{\Gamma(n)}h^{n-1} \quad (3.17)$$

Экстраполяция зависимостей (3.16) и (3.17) в область не положительных значений n дает

$$V_0 = 1, \quad S_0 = 0 \quad (3.18)$$

$$V_n = 0, \quad S_n = 0, \quad n \le 1 \quad (3.19)$$

Результаты (3.18) не удивительны. «Объем» нуль-симплекса и «площадь» его поверхности совпадают с таковыми для куба и для шара. Трактовка формул (3.19) такая же как в п. 1. (Еще раз напоминаем: если величина «объема» или «площади поверхности» равна нулю, это еще не значит, что они не существуют.) Кроме того, возможно объяснение, данное в *Замечании 1.1* п. 1.

4.3.4. Дополнительные замечания

Тот факт, что $V_0 = 1$ в формулах обычной геометрии (3.1), (3.7) и (3.16) не вызывает удивления. Ведь n-объем измеряется другими n-объемами. А поскольку в «плюс-геометрии» точка не имеет структуры, объем не зависит от ее «формы». Однако в минус-геометрии положение меняется. Уравнение (3.12) показывает, что в нульмерном пространстве может существовать какая-то структура.

Здесь мы впервые встретились с двойственностью понятия точки, о которой будем неоднократно говорить далее. Ранее мы фактически постулировали существование двух проявлений алгебраического нуля – нуль *обычный* и нуль *содержательный* (см. обсуждение аксиом (1.39)). Оказывается, нульмерное пространство также может проявляться двумя способами. Если оно рассматривается как часть плюс-пространства, оно является *обычной точкой.* Если нуль-пространство относится к антипространству, оно является *протяженным* и может содержать какие-то структуры.

Отметим еще одно допущение, которое было сделано в пп. 2 и 3 (и будет делаться в дальнейшем). Обычная метрика (2.1) использует понятие расстояния (одномерный объект) между двумя точками (нульмерные объекты). При этом точки и соединяющая их прямая линия расположены в пространствах с размерностью не меньше единицы. Введенные же нами нуль- и минус-метрики (2.2)–(2.4) подразумевают, что *объекты большей размерности (точка и прямая линия) «содержатся» в пространствах с меньшим числом измерений.*

Возможно, это обстоятельство отражает специфику нашего мышления. В настоящее время единственным способом представить нуль- и минус-пространство, хотя бы с помощью математической схемы, является использование в качестве основополагающих элементов точки и отрезки, а также их комбинирование с привлечением закономерностей ДРР.

В связи с этим возникает вопрос. Могут ли правильные нуль- и минус-тела «содержать» не только точки и отрезки, но и объекты большей размерности? Ниже мы увидим, что это действительно так.

Обычный n-куб включает N элементов размерности $k \le n$, что мы будем обозначать символом N_k^n. Для $n \ge 0$ имеем

$$N_k^n = 2^{n-k}\binom{n}{k} = \frac{2^{n-k}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)\Gamma(k+1)} \quad (3.20)$$

Результаты, полученные формальным использованием зависимости (3.20) при произвольных значениях n и k, удобно представить в виде таблицы 3.1.

Возможные объяснения отрицательных и дробных значений казалось бы «неделимых» элементов те же, что в п. 1. Для дробных значений имеется еще одна альтернатива, соответствующая ситуации, когда фигура является самопересекающейся. Например, обыкновенная звезда (пентаграмма) может рассматриваться как $5/2$-угольник. Поясним это утверждение. Угол φ между радиусами, проведенными из центра в вершины звезды, соединенные одной прямой, равен $4\pi/5$. С другой стороны, для правильного m-угольника, вписанного в окружность, имеем $\varphi = 2\pi/m$. Если $\varphi = 4\pi/5$, получаем $m = 5/2$.

Таблица 3.1. Количество k-мерных элементов n-мерного куба (в пустых клетках подразумеваются нули).

n \ k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	1				1/16	$-1/8$	5/32	$-5/32$	35/256
-3	-6	1			1/8	$-3/16$	3/16	$-5/32$	15/128
-2	12	-4	1		1/4	$-1/4$	3/16	$-1/8$	5/64
-1	-8	4	-2	1	1/2	$-1/4$	1/8	$-1/16$	1/32
0					1				
1					2	1			
2					4	4	1		
3					8	12	6	1	
4					16	32	24	8	1

Мы получили ответ на поставленный вопрос. Действительно, минус-кубы могут включать в качестве составных элементов кубы положительной размерности. В связи с этим использование понятий «точка» и «отрезок» применительно к антипространствам не представляется абсурдным.

В целом следует признать, что материал этого параграфа не обладает той убедительностью, что и п. 2. Однако мы сочли необходимым включить его в этот раздел, имея в виду возможное дальнейшее развитие теории антипространств.

4.4. Уравнение Шредингера в антипространствах

В этом разделе будут исследоваться решения стационарного уравнения Шредингера применительно к случаям нуль- и минус-пространств. Возникает вопрос — зачем это делать? Ведь ни откуда не следует, что это уравнение справедливо в антипространствах. Но мы так мало знаем об антимире, что пользуемся любой малейшей возможностью проникнуть в его тайны. И уравнение Шредингера — одна из таких возможностей.

4.4.1. Решение уравнения Шредингера для пространств с положительным числом измерений

В этом параграфе мы приведем известные решения уравнения Шредингера (используя наши обозначения) для удобства сопоставления со случаями пространств не положительного числа измерений.

Уравнение Шредингера для сферически симметричного случая, применительно к обычному n-мерному пространству и системе из двух взаимодействующих частиц, запишем в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d\Psi}{dr}+\left(\frac{\beta}{r^{n-2}}-\varepsilon\right)\Psi=0,$$

$$\Psi=\Psi(r),\quad r\in[0,\infty);\quad \Psi(0)<\infty,\quad \Psi(\infty)=0;\quad n\neq 2 \quad (4.1)$$

Здесь Ψ — пси-функция, r — расстояние от центра тяжести взаимодействующих частиц. Первое слагаемое в скобках отражает зависимость потенциальной энергии системы от расстояния между частицами. Величина $\beta=const$ включает фундаментальные постоянные, массы частиц, заряды и константу взаимодействия. Положительное значение β соответствует притяжению частиц, отрицательное — отталкиванию. Коэффициент $\varepsilon=const>0$ пропорционален собственной энергии системы E, для удобства промежуточных выкладок взятой с обратным знаком.

Сначала воспроизведем известное решение уравнения (4.1) применительно к хорошо изученному случаю $n=3$ (см. например, [13, с. 103]). Уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr}+\left(\frac{\beta}{r}-\varepsilon\right)\Psi=0 \quad (4.2)$$

Решение, удовлетворяющее условию ограниченности при $r\to\infty$, ищется в виде

$$\Psi=F(r)\exp\left(-\sqrt{\varepsilon}r\right) \quad (4.3)$$

После подстановки (4.4.3) в (4.4.2), получаем уравнение

$$rF''+2\left(1-\sqrt{\varepsilon}r\right)F'+\left(\beta-2\sqrt{\varepsilon}\right)F=0 \quad (4.4)$$

решение которого, ограниченное при $r\to 0$, ищется в виде ряда

$$F=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^m \quad (4.5)$$

Коэффициенты последнего, как выясняется после подстановки (4.5) в (4.4), удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{m+1}=\frac{2\sqrt{\varepsilon}(m+1)-\beta}{(m+2)(m+1)}a_m \quad (4.6)$$

Физически приемлемыми решениями исходного уравнения (4.2) соответствуют случаи, когда последовательность (4.6) обрывается, т.е.

$$\varepsilon=\varepsilon_m=\frac{\beta^2}{4(m+1)^2},\quad m=0,1,2,\ldots \quad (4.7)$$

(Можно показать, что в противном случае не удовлетворяется условие ограниченности Ψ при $r\to\infty$).

Тем самым установлено, что уравнение (4.2) имеет решения с дискретным спектром собственных значений энергии. Физически это означает, что водородоподобная материя может существовать в трехмерном пространстве.

Наше решение позволяет определить функцию Ψ с точностью до постоянного множителя. Вопрос о нормировке волновой функции на единицу мы не рассматриваем как не представляющий интереса для этого исследования.

В случае $n=4$ замена переменной $\sqrt{\varepsilon}r=\rho$ переводит (4.1) в уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{d\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{d\Psi}{d\rho}+\left(\frac{\beta}{\rho^2}-1\right)\Psi=0 \quad (4.8)$$

не содержащее параметра ε. При этом, даже не решая уравнение (4.8), можно утверждать, что дискретные значения энергии не определяются, что исключает возможность существования водородоподобных объектов в четырехмерном пространстве.

Замечание 4.1. Сделанный вывод сохраняет силу для системы из любого числа взаимодействующих частиц, так как после замены $\sqrt{\varepsilon} r_{ik} = \rho_{ik}$ получается система уравнений типа (4.8), не содержащая величины ε.

Замечание 4.2. Для реальных систем всегда имеются отклонения от степенного закона взаимодействия на достаточно малых расстояниях. При этом в уравнении (4.8) появляются дополнительные слагаемые и приведенные выше рассуждения становятся неправомерными. Однако ясно, что если точечные системы и существуют в четырехмерном пространстве, то они не могут быть аналогом трехмерных.

Для пространств $n \geq 5$ выражение (4.1) при $r \to 0$ переходит в уравнение Бесселя $r^2\Psi'' + (n-1)r\Psi' + \beta r^{4-n}\Psi = 0$, имеющее решения

$$\Psi = r^{(n-2)/2} J_\nu\left(-\frac{2}{n-4}\sqrt{\beta} r^{(4-n)/2}\right),$$

$$\Psi = r^{(n-2)/2} Y_\nu\left(-\frac{2}{n-4}\sqrt{\beta} r^{(4-n)/2}\right), \quad \nu = \frac{n-2}{n-4} \quad (4.9)$$

(Здесь J_ν и Y_ν — функции Бесселя первого и второго рода, соответственно.)

Выражения (4.9) для $n \geq 5$ осциллируют при $r \to 0$ с возрастающей частотой и амплитудой, что физически неприемлемо. Следовательно, и при $n \geq 5$ двухчастичный объект с законом взаимодействия r^{2-n} не реализуется.

Невозможность существования водородоподобной материи при $n \geq 4$ была ранее установлена в работе [16].

Полученные результаты настолько любопытны, что возникает потребность исследовать также случаи $n = 1$ и $n = 2$.

Для $n = 1$ уравнение (4.1) переписывается следующим образом

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + (\beta r - \varepsilon)\Psi = 0 \quad (4.10)$$

Замена переменной $r = \beta^{-1/3}\rho + \beta^{-1}\varepsilon, \quad \rho = \beta^{1/3} r - \varepsilon\beta^{-2/3}$ переводит (4.10) в уравнение Эйри:

$$\frac{d^2\Psi}{d\rho^2} + \rho\Psi = 0, \quad \rho \in [-\varepsilon\beta^{-2/3}, \infty) \quad (4.11)$$

Ясно, что величина Ψ зависит от ρ непрерывным образом. Поэтому дискретные уровни энергии не наблюдаются.

Приведем решение уравнения (4.11), которое подтверждает сделанный вывод: $\Psi = \sqrt{\rho} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2}\right)$.

Остается исследовать случай $n = 2$. Вместо (4.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \left[\beta \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \varepsilon\right]\Psi = 0 \quad (4.12)$$

Величина $r_0 = const > 0$ введена для того, чтобы сделать выражение под знаком логарифма безразмерным. Мы не будем обсуждать физический смысл r_0, потому что для нашего рассмотрения это не существенно.

Замена переменной

$$r = r_0 \exp\left(\frac{\rho+\varepsilon}{\beta}\right), \quad \rho = \beta \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \varepsilon$$

переводит (4.12) в уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{d\rho^2} + k(\varepsilon)\rho \exp\left(\frac{2\rho}{\beta}\right)\Psi = 0, \quad k(\varepsilon) = \frac{r_0^2}{\beta^2}\exp\left(\frac{2\varepsilon}{\beta}\right)$$

Очевидно, что функция Ψ зависит от ε непрерывно. Поэтому дискретные уровни энергии не существуют. Таким образом, установлено, что в пространствах с положительным числом измерений водородоподобная материя может существовать только при $n = 3$.

4.4.2. Уравнение Шредингера для нуль-пространства

Применительно к случаю $n = 0$ перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \left(\varepsilon - \beta r^2\right)\Psi = 0,$$

$$\Psi = \Psi(r), \quad r \in [0,\infty); \quad \Psi(0) < \infty, \quad \Psi(\infty) = 0 \quad (4.13)$$

По отношению к (4.1) для удобства изменены знаки постоянных ε и β с тем, чтобы они оставались положительными. При этом уравнение (4.13) подразумевает, что имеет место отталкивание частиц.

Уравнение (4.13) по форме напоминает уравнение линейного гармонического осциллятора [13, с. 80] и поэтому естественно применить проверенный для него метод решения.

Положим

$$\Psi = F(r)\exp\left[-\left(\sqrt{\beta}/2\right)r^2\right] \quad (4.14)$$

После подстановки (4.14) в (4.13), получаем для F уравнение

$$rF'' - \left(1 + 2\sqrt{\beta}r^2\right)F' + \varepsilon rF = 0 \quad (4.15)$$

Для $r \to 0$ положим $F \propto r^{\nu}$. При этом, как следует из (4.15), показатель ν должен удовлетворять условию $\nu(\nu - 2) = 0$. Отсюда получаем два возможных значения $\nu = 0$ и $\nu = 2$, обеспечивающие условие ограниченности при $r \to 0$.

Поэтому решение уравнения (4.15) будем искать в виде ряда

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{\nu+m}; \quad \nu = 0,2 \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, приходим к рекуррентному соотношению

$$a_{m+2} = \frac{2\sqrt{\beta}(\nu+m) - \varepsilon}{(\nu+m+2)(\nu+m)}a_m; \quad \nu = 0,2 \quad (4.17)$$

Если в (4.17) положить $\nu = 0$, приходим к абсурдному результату. При $a_0 \neq 0$ коэффициент a_2 обращается в бесконечность. Поэтому физически приемлемым является только одно из двух выражений (4.17), где $\nu = 2$. Таким образом,

$$a_{m+2} = \frac{2\sqrt{\beta}(2+m) - \varepsilon}{(4+m)(2+m)}a_m; \quad m = 0,2,4,... \quad (4.18)$$

и волновая функция с точностью до постоянного множителя дается формулой

$$\Psi = \left(a_0 r^2 + a_2 r^4 + a_4 r^6 + ...\right)\exp\left[-\left(\sqrt{\beta}/2\right)r^2\right] \quad (4.19)$$

Степенной ряд (4.19) в общем случае расходится, так как при $m \to \infty$

$$a_{2m} \propto \left(\sqrt{\beta} r^2\right)^m / m! \quad (4.20)$$

Для значений (4.20) функция F, представляемая рядом (4.16), при $r \to \infty$ имеет своим пределом функцию $\exp\left(\sqrt{\beta} r^2\right)$ и экспоненциальный множитель в (4.19) не компенсирует более быстрое возрастание $F(r)$. Поэтому физически приемлемыми являются только те случаи, когда ряд (4.16) обрывается, что, согласно (4.18), дает условие, определяющее собственные значения энергии, при которых подходящее решение задачи (4.13) существует:

$$\varepsilon = \varepsilon_m = 2\sqrt{\beta}(m+2); \quad m = 0, 2, 4, ... \quad (4.21)$$

Из формул (4.16)–(4.19) и (4.21) следует, что

— В отличие от трехмерного случая (4.7), уровни энергии положительны и расположены на одинаковых расстояниях друг от друга, отличаясь на величину $4\sqrt{\beta}$. (В этом имеется аналогия с линейным гармоническим осциллятором [13, с. 81].) Можно думать, что если нуль-системы действительно существуют, они должны быть более стабильными, чем системы в других измерениях.

— Выполняется принцип неопределенности Гейзенберга, так как минимальное значение энергии при $m = 0$ равно конечной величине: $\varepsilon_0 = 4\sqrt{\beta}$

— Частицы никогда не сближаются, так как $\Psi(0) = 0$.

— Замечательно, что связанными оказываются состояния, соответствующие отталкиванию частиц.

4.4.3. Уравнение Шредингера для минус-пространств

Применительно к случаю $n \le 1$ будем рассматривать уравнение (4.1) в форме сходной с (4.13):

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{(1-n)}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \left(\varepsilon - \beta r^{2-n}\right)\Psi = 0,$$

$$\Psi = \Psi(r), \quad r \in [0, \infty); \quad \Psi(0) < \infty, \quad \Psi(\infty) = 0 \quad (4.22)$$

Пренебрегая в (4.22) слагаемым βr^{2-n}, находим, что

$$\Psi = \Psi_0 \propto r^{2-n}, r \to 0 \quad (4.23)$$

Последнее означает, что в минус-пространствах частицы никогда не сближаются.

Отбрасывая в (4.22) слагаемое ε, убеждаемся, что основной множитель, определяющий поведение решения при больших r, имеет вид

$$\Psi = \Psi_\infty \propto \exp\left[-\sqrt{\beta}\left(\frac{2}{4-n}\right) r^{(4-n)/2}\right], \quad r \to \infty \quad (4.24)$$

(При $n = 0$ отсюда следует (4.14).)

Подставляя в (4.22) выражение $\Psi = F\Psi_\infty$, убеждаемся, что найти функцию F в виде полинома (как это сделано в п. 4.1 и п. 4.2) и тем самым получить точное решение задачи не удается. Поэтому проведем качественное исследование.

Сделаем в (4.22) подстановку

$$\Psi = r^\mu \Phi, \quad \mu = (1-n)/2 > 0 \quad (4.25)$$

Тогда для переменной Φ получаем уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left[\varepsilon - \beta r^{2-n} - \frac{(1-n)(3-n)}{4r^2}\right]\Phi - 0 \quad (4.26)$$

Последнее по форме совпадает с уравнением, описывающем «квантовое движение» на полуоси $r \in [0, \infty)$ с потенциальной функцией

$$U(r)=\beta r^{2-n}+\frac{(1-n)(3-n)}{4r^2}>0 \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) обращается в бесконечность при $r\to 0$ и $r\to\infty$ и имеет минимум в точке

$$r=r_{\min}=\left[\frac{(1-n)(3-n)}{2\beta(2-n)}\right]^{1/(4-n)} \qquad (4.28)$$

Первое граничное условие для уравнения (4.26), в соответствии с (4.23) и (4.25), можно получить из выражения $\Phi(r)\le const\cdot r^{(3-n)/2}, \quad r\to 0$. Имеем

$$\Phi(0)=0 \quad (4.29)$$

Второе граничное условие следует из (4.24) и (4.25):

$$\Phi(\infty)=0 \quad (4.30)$$

Уравнение (4.26), рассматриваемое на полуоси $r\in[0,\infty)$ совместно с граничными условиями (4.29) и (4.30), имеет бесконечное дискретное множество решений, соответствующих дискретному множеству собственных значений энергии $\varepsilon=\varepsilon_m>0$. Этот факт объясняется тем, что в случаях $n\le 1$ потенциальная яма (4.27) имеет «более крутые стенки», чем при $n=0$, когда аналогичные решения существуют.

Таким образом, связанные состояния с дискретным спектром собственных значений энергии существуют при всех $n\le 0$.

4.4.4. Учет орбитального движения

В настоящее время мы не можем отчетливо представить, что собой представляют всевозможные вращения в не положительных пространствах. Тем не менее, можно формально рассмотреть следующее обобщение уравнения (4.22), имеющее отношение к «вращениям»

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2}-\frac{(1-n)}{r}\frac{d\Psi}{dr}+\left(\varepsilon-\beta r^{2-n}-\frac{\lambda}{r^2}\right)\Psi=0 \quad (4.31)$$

(Граничные условия те же, что в (4.22).)

Безразмерный параметр $\lambda=const>0$ можно трактовать как *постоянную разделения переменных,* не задумываясь о том, какие именно «вращения» она представляет.

Для $n=0$ (нульмерное пространство) можно искать величину Ψ в виде (4.14). При этом вместо (4.15) получаем следующее уравнение для функции F:

$$r^2F''-\left(r+2\sqrt{\beta}r^3\right)F'+\left(\varepsilon r^2-\lambda\right)F=0 \quad (4.32)$$

При $r\to 0$ имеем

$$F\propto r^{\nu}, \quad \nu=1\pm\sqrt{1+\lambda} \quad (4.33)$$

Отрицательное значение ν не согласуется с граничным условием $\Psi(0)<\infty$ и поэтому должно быть исключено.

Подставляя в (4.32) ряд

$$F=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^{\nu+m}, \quad \nu=1+\sqrt{1+\lambda} \quad (4.34)$$

и приравнивая выражения при одинаковых степенях r, находим рекуррентное соотношение

$$a_{m+2}=\frac{2\sqrt{\beta}(\nu+m)-\varepsilon}{(\nu+m+2)(\nu+m)-\lambda}a_m, \quad \nu=1+\sqrt{1+\lambda} \quad (4.35)$$

Отсюда следует, что при

$$\varepsilon = \varepsilon_m = 2\sqrt{\beta}\left(\sqrt{1+\lambda} + m + 1\right) \quad (4.36)$$

ряд (4.34) обрывается. Таким образом, формула (4.36) дает возможные значения энергетических уровней при наличии орбитального движения. Если величина λ имеет конечное или бесконечное дискретное количество значений, в соответствующее число раз увеличивается и число возможных состояний системы.

Рассмотрим случаи $n \le 1$. Подстановка (4.25) переводит (4.31) в аналог уравнения (4.26):

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left\{\varepsilon - \beta r^{2-n} - \left[\lambda + \frac{(1-n)(3-n)}{4}\right]\frac{1}{r^2}\right\}\Phi = 0 \quad (4.37)$$

Сравнивая (4.37) и (4.26), убеждаемся, что при $\lambda + (1-n)(3-n)/4 > 0$ нет никаких качественных отличий от случая $\lambda = 0$.

Таким образом, для всех $n \le 0$ состояния с дискретным энергетическим спектром реализуются и при наличии «вращения».

Замечание 4.3. Отсутствие дискретного спектра при $\lambda \ne 0$ было ранее установлено в работе [16] применительно к значениям $n \ge 4$.

4.5. Физические аналогии

Заранее предупредим читателя — какие-либо *количественные* сопоставления с экспериментальными фактами, вытекающие из концепции нуль- и минус-пространства, у нас отсутствуют. В настоящее время имеется слишком ограниченный объем сведений по вопросам, связанным с реальностью. Несомненно, можно построить абстрактную *математическую теорию* антипространства, включающую минус-алгебру и минус-геометрию. Первым шагом должно стать более углубленное исследование РР и ДРР в тех вопросах, которые непосредственно связаны с минус-концепцией. В частности, необходимо установить границы применимости формул, дающих нулевое значение квазисумме ДРР.

Однако на пути создания *минус-механики* и *минус-физики* имеется ряд препятствий неясной степени сложности. В частности, мы не знаем, являются ли масса и заряд специфическим трехмерным проявлением свойств материи или эти сущности имеют аналоги и при других (в том числе не положительных) размерностях пространства. Как «течет» время в антипространствах? Существует ли минус-время (в том числе многомерное и минус-мерное)? И т. д.

Построение минус-механики и минус-физики может быть сделано перебором огромного количества вариантов сопоставления теоретических и экспериментальных данных, либо в результате «внезапного озарения». Ни один из этих путей не поддается прогнозированию, тем более, что в настоящее время сама необходимость минус-механики и минус-физики находится под вопросом.

Однако ряд *косвенных* закономерностей присущих нуль- и минус-объектам имеет аналоги в физике микромира. Создается впечатление, что на достаточно малых расстояниях начинают проявляться не только квантовые, но и «минус-геометрические» свойства материи. Последние не наблюдаются в макромире в силу обратной зависимости «объема» от размера (см. п. 4.).

4.5.1. Рабочая концепция антипространства. Дуализм понятия точки

При рассмотрении физических объектов не положительной размерности желательно иметь какую-то «образную» картину, позволяющую ориентироваться в лабиринте далеких от повседневной практики представлений.

Согласно метрике (2.2), нульмерное пространство представляет из себя бесконечно протяженное пространство с бесконечным (счетным) множеством взаимно перпендикулярных осей. С другой стороны, точка также является нульмерным пространством.

Для примирения этих двух (на первый взгляд взаимоисключающих) концепций необходимо допустить, что справедлива физическая

Гипотеза. *В зависимости от способа взаимодействия с другим (макроскопическим или микроскопическим) объектом, нуль-объект может проявлять свои свойства либо как «бесконечно протяженный объект» либо как «точка».*

В нашей трактовке различные способы взаимодействия (наблюдения, измерения) в математическом отношении имеют своим происхождением дуализм понятия квазисуммы нулевого числа членов ряда, которая одновременно представляет обычный нуль и двухстороннюю бесконечную сумму конечных величин (см. п. 1.3.).

Замечание 5.1. Наша интерпретация дуализма точки не является принципиально новой. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, движущийся электрон можно трактовать как точечный объект, если его импульс не определен, либо как бесконечно протяженный, если импульс известен точно.

Дельта-функция Дирака (аналог «физической» точки) может быть представлена интегралом

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixt)dt \qquad (5.1)$$

содержащим всевозможные гармоники, «размазанные» по всей оси x (аналог «протяженной» точки).

Представление (5.1) полезно в приложениях, так как дает возможность решать краевые задачи с «точечными» граничными условиями, используя различные варианты метода Фурье.

Минус-пространства получаются «изъятием» из нуль-пространства некоторого числа координатных осей с обязательным сохранением их «места». При этом не выявлено какой-либо универсального типа симметрии при замене $n \to -n$. Редким исключением является формула для «объема» n-куба: $V_n = 1/V_{-n}$ (см. п. 3.1.).

4.5.2. Гипотеза Большого взрыва

Происхождение трехмерной Вселенной «из ничего» некоторым образом может быть объяснено «взрывом» нульмерного (или минус-мерного) пространства, которое «выделило» из себя трехмерное. Большинство физиков в настоящее время склоняются к точке зрения, что исходное «ничто» является неизвестным нам состоянием вещества, возможно, с неизвестными геометрическими свойствами. Но, предлагая различные гипотетические варианты «праматерии», естественно привлекать «ближайших родственников» нашего пространства. Таковыми, в частности, являются наши антипространства. От других (пусть и искривленных) пространств имеется выгодное отличие. Будучи не наблюдаемыми в макромире, они являются бесконечно протяженными, и поэтому трехмерной материи «есть куда расширяться».

Конечно, наша гипотеза порождает множество философских и физических вопросов. Например, существует ли нуль-пространство в единственном экземпляре или их бесконечно много (в соответствии с тем, что в нашем Мире «много физических точек»)?

Изменилась ли размерность пра-пространства после «выделения» нашего Мира? Имеется ли один трехмерный Мир или из различных координат пра-мира могут возникнуть много трехмерных миров, которые не пересекаются и могут взаимодействовать только через нуль-пространство? Не является ли гравитация «пружиной», пытающейся возвратить наш Мир в антипространство из которого мы «выскочили» через точку? (Разумеется, точка предполагается «физической» и размер ее может быть связан с «фундаментальной длиной», если таковая имеется.) Происходит ли в настоящее время рождение трехмерной материи, например, в квазазарах или ядрах галактик? Не являются ли черные дыры нуль- или минусобъектами? Может ли искривленное антипространство быть одновременно плюс-мерным? И т. д.

4.5.3. Перечень аналогий

В этом параграфе перечислены некоторые факты, для которых возможно качественное объяснение в рамках концепции антипространства.

— Чем «протяженнее» субатомный объект, тем меньше его масса. Этот факт известен почти с момента рождения квантовой механики. Как следует из формулы Де Бройля $\lambda = h/(mc)$, длина волны движущейся частицы обратно пропорциональна ее массе. Комптоновская длина волны $\lambda = h/(mc)$, характеризующая относительные размеры микрообъектов в состоянии покоя, зависит от массы таким же образом.

Аналогичной является зависимость «объема» минус-тела от размера (см. п. 3.4.). Правда мы используем здесь дополнительные предположения, что объем частицы связан с массой прямой зависимостью (не обязательно линейной), а размер коррелирует с длиной волны.

— Дуализм частица-волна в физическом отношении напоминает двойственность понятия точки, которая одновременно является также бесконечно протяженным нульмерным пространством. В математическом отношении указанный дуализм имеет своим происхождением понятие суммы нулевого числа членов ряда (см. п. 1.3.) Последняя может быть представлена либо нулем, либо ДРР, квазисумма которого равна нулю.

— Отсутствие потери энергии при «орбитальном движении» электрона может говорить о том, что «вращение» происходит в антипространстве, законы излучения в котором нам не известны. Эти же соображения относятся к такому понятию как спин.

— Считается, что в кварконии сила взаимодействия кварков F не убывает с расстоянием. Согласно п. 4, это может иметь место в пространствах $n \le 1$, так как $F \propto r^{1-n}$. Правда, в настоящее время считается, что эта сила вообще не зависит от расстояния, т. е. имеем $n = 1$. Однако наши знания о кваркониях не противоречат и возможностям $n < 1$.

– Кварки никогда не сближаются. Согласно п. 4, волновая функция системы из двух частиц в n-пространстве $(n \le 0)$ при $r \to 0$ имеет вид $\Psi \propto r^{2-n}$. Таким образом, при всех указанных значениях n частицы не могут находиться одновременно в точке $r = 0$.

– По отношению к электрону кварки имеют дробные заряды. Этот факт допускает объяснение в рамках теории РР и ДРР, моделирующей антипространство. Мы видели, что РР с целыми слагаемыми может иметь дробную квазисумму (см. п. 1.1).

– Многомерность объектов в теории струн не исключает того, что они на самом деле являются минус-мерными.

– Расходимости в квантовой электродинамике представляют из себя привычное явление. Обычно регуляризация «расходящихся формул» заключается в вычитании аналитического слагаемого, имеющего особенность, и сохранении конечной составляющей, которой и придается физический смысл. То есть расходящаяся часть трактуется как «ненаблюдаемая». Но «ненаблюдаемость» аналитических выражений является неотъемлемой частью теории антипостранства. Не являются ли расходимости в существующих теориях следствием попыток описать минус-мерную ситуацию на языке плюс-формул? Неважно, что обычно речь идет об интегралах, а в нашей концепции о сумме. Ведь интеграл — это тоже сумма.

Трехмерные тела при различных движениях и взаимодействиях проявляют не только трехмерные свойства, но также двумерные (вращение) и одномерные (прямолинейное движение) и нульмерные (когда размер тела много меньше характерных размеров процесса).

Естественно допустить, что на достаточно малых расстояниях трехмерные объекты могут проявлять также свойства, отвечающие «движениям» в нуль- и минус-пространствах.

Однако описание какого-либо физического процесса на языке минус-геометрии в настоящее время нам не доступно. Не исключено, что именно формализм квантовой механики и электродинамики позволяет провести усредненное рассмотрение явлений в антипространствах. Возможно ли более детальное описание дифракции электрона, его движения внутри атома, спина и т. д. в предположении, что указанные явления происходят (хотя бы частично) в антипространстве? Этого мы не знаем. *Однако такая альтернатива должна приниматься во внимание при рассмотрении фундаментальных проблем физики микромира.*

Нарисованная нами картина Мира еще не имеет статуса физической теории. Это только «предтеча» (квазитеория), основным достоинством которой является достаточная занимательность. Тем не менее, ясно, что на пути построения минус-алгебры мы можем получить важные результаты, имеющие приложения в «обычных» разделах математики. Расходящиеся ряды, которые были изгнаны из анализа (в основном усилиями Вейерштрасса), должны получить новую жизнь.

Что касается физических приложений, то вопрос о реальном существовании нуль- и минус-объектов, разумеется, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах*. — М.: Наука, 1990.

2. Бабенко Ю.И. *Метод расчета тепловых и диффузионных потоков*.— Л.: Химия, 1986.

3. Бабенко Ю.И. *Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена*. — СПб.: НПО «Профессионал», 2009.

4. Бабенко Ю.И., Иванов Е.В. *Экстрагирование. Теория и практические приложения*. — СПб.: НПО «Профессионал», 2009.

5. Гинсбург В.Л. *О физике и астрофизике*. — М.: Наука, 1974.

6. Дирак П.А.М. *Принципы квантовой механики*. — М.: Наука, 1990. Dirac, P.A.M. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Claredon Press, 1958.

7. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. *Красота фракталов*. — М.: Мир, 1993. Peitgen, H.-O., Richter, P.H. *The Beauty of Fractals*. — Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag, 1986.

8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. — М.: Наука, 1982.

9. Таганов И.Н., Бабенко Ю.И. *Антивремя и антипространство*.— СПб.: СпбГУ, 2001.

10. Уиллер Дж. *Квант и Вселенная*. В кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности*. Ред. Федоров Ф.И. — М.: Мир, 1982.

11. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3.* —М.: Наука, 1968.

12. Харди Г.Г. *Расходящиеся ряды*. — М.: ИЛ, 1951. Hardy, G.H. *Divergent Series*. Oxford: Claredon Press, 1949.

13. Шифф Л. *Квантовая механика*. — М.: ИЛ, 1959. Shiff, L. *Quantum Mechanics*. — New York-Toronto-London: McGraw Hill Book Company Inc., 1955.

14. Юшкевич А.П. (Ред.) *История математики. Т. 3*. — М.: Наука, 1972.

15. Babenko, Yu.I. Non-positive Dimension Spaces. In *Proceeding of the International conference «Problems of Practical Cosmology» held at Russian Geographical Society 23-27 June 2008, St-Peterburg*. Vol 2, p. 54.

16. Gurevich, L., Mostepanenko, V. On the Existence of Atoms in n-Dimensional Space // Phys. Letters. (1971) V. 35 A, № 3. P. 201.

17. Mandelbrot, B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. — San Francisco: Freeman, 1982.
18. Méhauté, A. *Les géométries fractales*. — Paris: Hermes, 1990.